6

TEORÍA DE JUEGOS

6.1. Problema del juego de petanca

Dos grupos de jubilados están jugando a la petanca, y han llegado a la jugada definitiva. El lanzador del primer grupo puede lanzar la bola grande más lejos que donde está la pequeña, puede colocarla al lado, o puede lanzar más corto, no llegando hasta donde está la pequeña. El lanzador del segundo grupo, que lanza después del anterior, puede tratar de colocarla al lado de la pequeña, o bien golpear a la pequeña y alejarla de la bola del otro equipo.

Si el primero lanza largo o corto y el segundo la coloca al lado, ganará el segundo equipo, que obtendrá 25 € del primero. Si el primero la coloca al lado y el segundo también, ganará el primero, que recibirá 10 € del segundo.

Si el primero lanza largo, y el segundo golpea la bola pequeña, la habrá acercado a la bola del primero, que ganará 20 € a costa del segundo. Si el primero lanza corto o la coloca al lado, pero el segundo golpea la bola pequeña, la aleja del primero, que pierde 30 €, que gana el segundo grupo.

a) ¿Cómo deben jugar los lanzadores?
b) Si existe equilibrio, indicar de qué tipo es, cuál sería el equipo que ganaría y la cantidad en euros que percibiría del otro equipo.

		GRUPO 2		
		LD	G	Lo peor
GRUPO 1	LJ	–25	20	(–25) ← Lo mejor
	LD	10	–30	–30
	C	–25	–30	
	Lo peor	(10) ↑ Lo mejor	20	

La tercera está dominada simplemente.

Luego no hay "punto de silla".

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} -25 & 20 \\ 10 & -30 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-30 - 10}{-25 - 20 - 10 - 30} = \frac{8}{17}$$

$$q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-30 - 20}{-25 - 20 - 10 - 30} = \frac{10}{17}$$

b) El primer Grupo lanzará lejos en 8 de cada 17 jugadas, y lanzará al lado de la bola pequeña en 9 de cada 17 jugadas.
El segundo Grupo lanzará al lado de la bola pequeña en 10 de cada 17 jugadas, y tratará de golpear la bola del contrario en 7 de cada 17 jugadas.

c) Se trata de un equilibrio en estrategias mixtas. El valor del juego sería el siguiente:

r_{ij}	$P(r_{ij})$
–25	$p \cdot q = \frac{8}{17} \cdot \frac{10}{17} = \frac{80}{289}$
20	$p \cdot (1-q) = \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{17} = \frac{56}{289}$
–25	$(1-p) \cdot q = \frac{9}{17} \cdot \frac{10}{17} = \frac{90}{289}$
–25	$(1-p) \cdot (1-q) = \frac{9}{17} \cdot \frac{7}{17} = \frac{63}{289}$
	1

$$E(r) = (-25) \cdot \frac{80}{289} + 20 \cdot \frac{56}{289} + 10 \cdot \frac{90}{289} + (-30) \cdot \frac{63}{289} = -6{,}47\ €.$$

Ganaría el segundo grupo, y en media percibiría del primero 6,47 € por jugada.

6.2. Problema de la competencia entre empresas por la cuota de mercado, utilizando como herramienta la publicidad

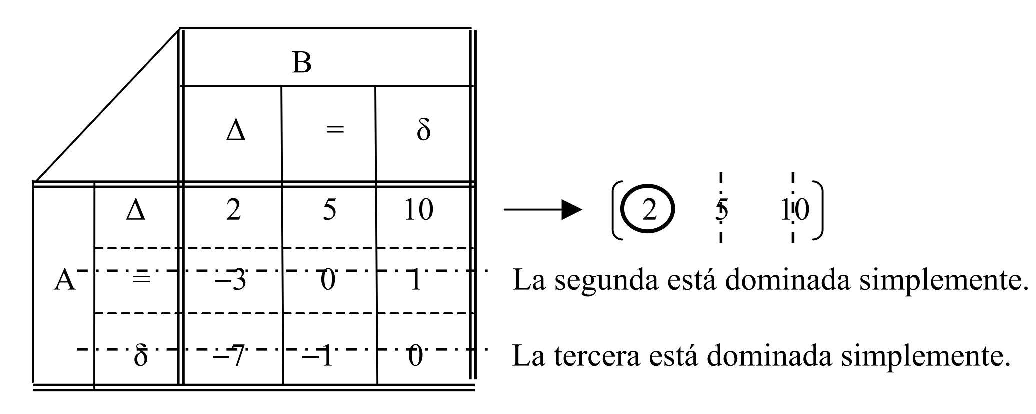
Dos empresas están compitiendo en un mercado cerrado, por conseguir la mayor cuota de mercado. Para el ejercicio presupuestario siguiente, ambas tienen tres opciones: incrementar la publicidad, mantenerla como en el ejercicio anterior o reducirla. En función del aprovechamiento que obtenga cada uno de los equipos comerciales de esta publicidad, se estima que si ambas empresas incrementan la publicidad la primera conseguirá un 2% más de cuota que la segunda, y que si ambas empresas mantienen la publicidad o la disminuyen, no se modificará la cuota de mercado.

Si la primera empresa incrementa la publicidad y la segunda la mantiene o la disminuye, la primera ganará respectivamente un 5% y un 10% de cuota a la segunda. Si la segunda empresa incrementa la publicidad y la primera la mantiene o la disminuye, la segunda ganará respectivamente un 3% y un 7% a la primera.

Si una de ellas mantiene la publicidad como en el ejercicio anterior, y la otra la disminuye, la que la mantenga ganará un 1% de cuota a la otra.

¿Cómo deben actuar cada una de las empresas en relación a su política de publicidad?

¿Cuál sería, si existe, la expectativa esperada de incremento o disminución de cuota de mercado para la primera empresa en el próximo ejercicio?



		B		
		Δ	=	δ
A	Δ	2	5	10
	=	–3	0	1
	δ	–7	–1	0

→ [(2) 5 10]

La segunda está dominada simplemente.

La tercera está dominada simplemente.

Ambas deberían aumentar su inversión en publicidad, y la primera ganaría a la segunda un 2% de cuota de mercado.

6.3. Problema de las apuestas en el juego de los dados

Dos personas están jugando a apostar sobre el resultado del lanzamiento de un dado, que maneja una tercera persona (cada una apuesta con carácter previo al lanzamiento, y de acuerdo con el resultado, una paga y la otra cobra, o viceversa). Cada uno de los sujetos puede apostar de la siguiente manera:

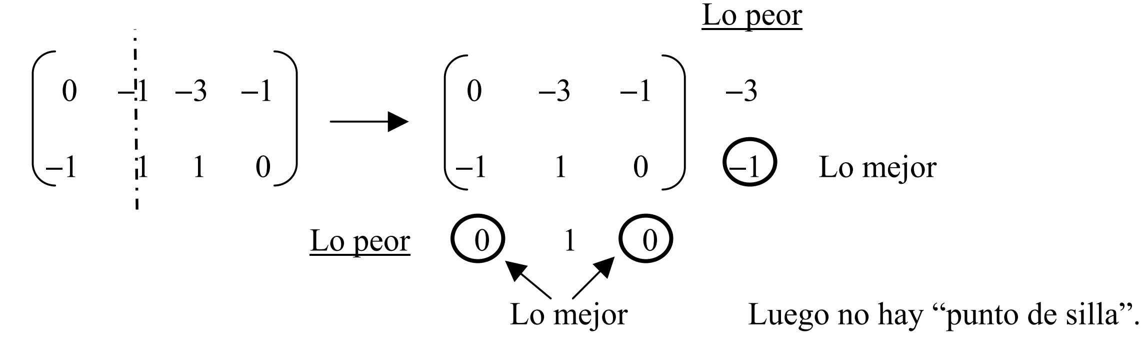
- *Resultado "par".*
- *Resultado "uno".*
- *Resultado "tres".*
- *Resultado "cinco".*

Si los dos sujetos apuestan por el mismo resultado de los cuatro antes citados, no se produce cobro ni pago alguno. Si el primer jugador apuesta par y el segundo impar, el segundo recibe del primero 1 € si ha apostado "uno" o "cinco", y 3 € si ha apostado "tres". Si el primer jugador apuesta impar y el segundo, par, el primero paga 1 € al segundo.

Si ambos apuestan impar, pero el primer jugador apuesta por "una puntuación menor que el segundo, el primero paga al segundo 2 €; si el primer jugador apuesta por una puntuación mayor que el segundo, el primero cobraría del segundo 1 €.

a) Si el primer jugador tuviera la opción de decidir con carácter previo si juega o no, ¿le interesaría jugar?
b) Si asumimos que los dos juegan, ¿cuál sería la estrategia de cada uno?

		II				
		P	1	3	5	
I	P	0	–1	–3	–1	
I	~~1~~	~~–1~~	~~0~~	~~–2~~	~~–2~~	La segunda está dominada simplemente.
I	~~3~~	~~–1~~	~~1~~	~~0~~	~~–2~~	La tercera está dominada simplemente.
I	5	–1	1	1	0	



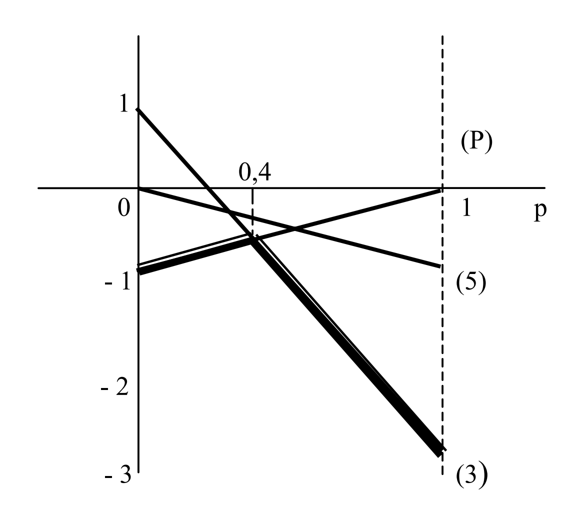
a) A priori, no podemos indicar si le interesa o no jugar, dado que si él elige la cuarta alternativa, y su oponente la tercera, podría obtener un beneficio.

b) Si juegan:

$$\begin{array}{ccc} & \underset{\smile}{P} & \underset{\smile}{3} & \underset{\smile}{5} \\ P)\ p & 0 & -3 & -1 \\ 5)\ 1-p & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$E(I / P) = p - 1$

$E(I / 5) = -p$



Si soy el jugador I, y aplico el criterio del minimax, lo peor para mí será la frontera inferior de la poligonal.

De entre esos puntos elegiré lo mejor, el punto de corte entre las rectas (P) y (3):

$$p - 1 = 1 - 4p \Rightarrow 5p = 2 \Rightarrow p = \frac{2}{5}$$

Si soy el jugador II, no elegiré nunca la alternativa (5), ya que para cualquier valor de “p”, siempre percibiría menos que si elijo (P) o elijo (3) en una determinada proporción en estrategias mixtas.

$$\begin{array}{ccc} & \underset{\smile}{P} & \underset{\smile}{3} \\ & q & 1-q \\ P) & 0 & -3 \\ 5) & -1 & 1 \end{array}$$

$$q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{1 + 3}{1 + 3 + 1 + 0} = \frac{4}{5}$$

Por tanto:

- I jugaría “Par” en dos de cada cinco jugadas, y “5” en tres de cada cinco jugadas.
- II jugaría “Par” en cuatro de cada cinco jugadas, y “3” en una de cada cinco jugadas.

El valor del juego sería:

$$E(I / P) = p - 1 = -\frac{3}{5}$$

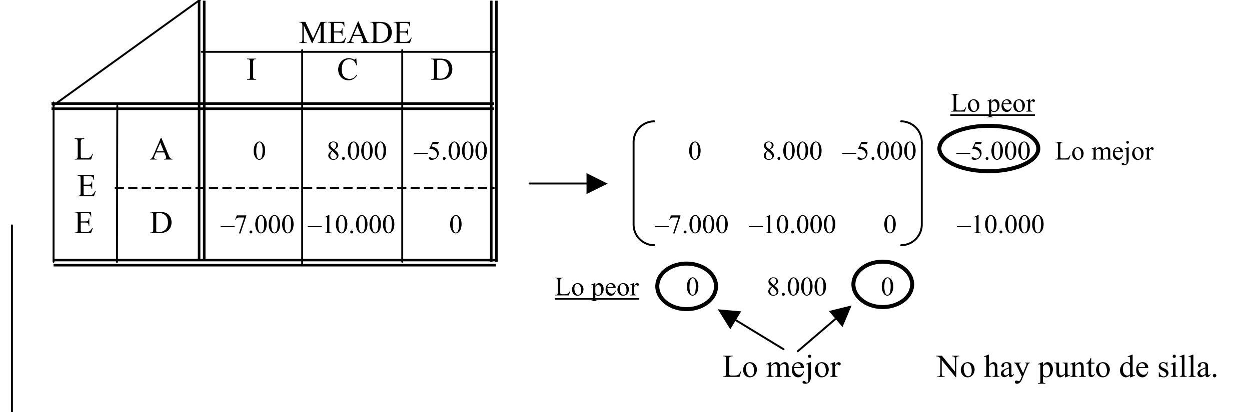
es decir, por término medio el jugador I pagaría al jugador II, 0,6 € en cada jugada.

6.4. Problema de estrategias militares en la batalla de Gettysburg

Los generales Lee y Meade se encuentran frente a frente en la batalla de Gettysburg, y deben decidir cómo enfrentarse el uno al otro. La posición de Lee está limitada a dos posibles estrategias: atacar con su infantería el flanco derecho de Meade, o defender su posición en una meseta. Por su parte, Meade, dispone de una importante unidad de caballería y otra de artillería, por lo que puede hacer tres cosas: lanzar un ataque masivo de infantería, lanzar una carga de caballería con apoyo artillero, o defender su posición.

En el caso de que los dos generales ataquen, o los dos mantengan una posición defensiva se producirá un equilibrio en el número de bajas de ambos contendientes. Si es Lee quien ataca, y Meade quien defiende su posición, Lee estima que tendrá 5.000 bajas más que Meade; pero si la estrategia de ambos es inversa, sería Meade el que tendría 7.000 bajas más que Lee. Por último, si Meade lanza una carga de caballería con apoyo artillero, espera conseguir romper la defensa de Lee, ganar la batalla y producir a Lee 10.000 bajas más que las suyas; aunque en este caso, si en vez de mantener una posición defensiva, Lee lanzara un ataque simultáneo, sería Meade el que sería derrotado, y perdería 8.000 hombres más que los que perdiera Lee.

- *a) ¿Cuál debe ser la estrategia de ambos generales?*
- *b) Si existe equilibrio, indicar de qué tipo es, cuál sería el ejército que ganaría la batalla y el número de bajas que tendría el ejército perdedor más que el ejército ganador.*

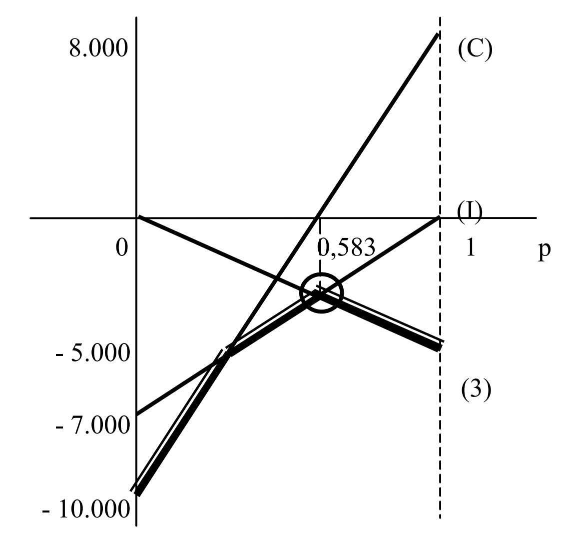


$$\begin{matrix} p \\ 1-p \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 8.000 & -5.000 \\ -7.000 & -10.000 & 0 \end{pmatrix}$$

$E(L / I) = 7.000\ p - 7.000$

$E(L / C) = 8.000\ p - 10.000\ (1 - p) = 18.000\ p - 10.000$

$E(L / D) = -5.000\ p$



Lo peor para Lee es tener el mayor número de bajas, es decir, la poligonal inferior del gráfico.

De entre estos puntos, y de acuerdo con el criterio del minimax, elegiría el mejor, esto es, el punto de corte entre "I" y "D" (ataque de Meade con infantería, o defensa de Meade)

$$7.000\ p - 7.000 = -5.000\ p \Rightarrow p = \frac{7}{12}$$

Por su parte, Meade, hace un análisis similar, y llega a la conclusión de que Lee jugará 7 de cada 12 veces a atacar, y defenderá en 5 de cada 12 veces. O lo que es lo mismo, hay un 58% de probabilidades de que Lee ataque, y un 42% de que defienda (en la batalla real, Lee atacó).

Asumiendo lo anterior, las expectativas de Lee serían:

$$E(L / I) = 7.000 \cdot \frac{7}{12} - 7.000 = -2.917$$

$$E(L / C) = 18.000 \cdot \frac{7}{12} - 10.000 = 500$$

$$E(L / I) = -5.000 \cdot \frac{7}{12} = -2.917$$

es decir, que si Meade atacara con la caballería, sería Lee el que tendría 500 bajas menos que él, siendo este el peor resultado posible esperado. Por ello, Meade decidirá no atacar con la caballería.

$$\begin{array}{ccc} & \underset{q}{\text{I}} & \underset{1-q}{\text{D}} \\ \text{A)} & 0 & -5.000 \\ \text{D)} & -7.000 & 0 \end{array} \qquad q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0 + 5.000}{0 + 5.000 + 7.000 + 0} = \frac{5}{12}$$

es decir, Meade atacaría con su infantería 5 de cada 12 veces (42% de probabilidad), y defendería 7 de cada 12 veces (58% de probabilidad).

El número de bajas que tendría Lee sería superior en 2.917 hombres al número de bajas que tendría Meade.

Existe, por tanto, un equilibrio en estrategias mixtas (en la batalla real, Lee perdió y tuvo más bajas que Meade, aunque este último no le persiguió, y le dio tiempo a recuperarse, con lo que la Guerra de Secesión americana duró todavía dos años más. Esta fue la razón por la que Meade, a pesar de haber ganado la batalla, fue sustituido por el general Grant como comandante en jefe del ejército yankee).

6.5. Problema de estrategias de producción en un mercado de duopolio en el sector del acero

Dos empresas dominan el mercado comarcal del acero (son un duopolio en su mercado), y tienen que decidir cuál debe ser el volumen de producción para el siguiente trimestre. Las alternativas que tienen son producir al máximo de capacidad, producir una cifra intermedia o producir el mínimo para cubrir costes fijos.

Los esquemas de producción de estas dos empresas son muy diferentes, y mientras que la primera ha invertido en renovarse tecnológicamente, la segunda no lo ha hecho; lógicamente, el esquema de costes es diferente para ambas, con fuertes amortizaciones para la primera, y con elevados costes de personal para la segunda.

Si ambas empresas deciden producir al máximo, la primera ganará un millón de euros más que la segunda, pero si esta decide producir una cifra intermedia o una cifra mínima, la primera ganará respectivamente, cinco y tres millones de euros menos que la segunda.

Si ambas empresas deciden producir una cifra intermedia, ganarán las dos lo mismo, pero si la segunda decide producir al máximo, la primera ganará dos millones de euros menos que la segunda, y si la segunda decide producir una cifra mínima, la primera ganará un millón de euros más que la segunda.

Si ambas empresas deciden producir una cifra mínima, la primera ganará cuatro millones de euros más que la segunda, pero si esta decide producir una cifra máxima, la primera ganará tres millones de euros más que la segunda, y si esta decide producir una cifra intermedia, la primera ganará seis millones de euros menos que la segunda.

En estas condiciones, determinar cuál debe ser la estrategia a seguir por ambas empresas, y cuál sería, si existe, el punto de equilibrio entre ambas estrategias, en el cual una de ellas asume que va a ganar una determinada cantidad más que la otra, y ésta que va a ganar esa misma cantidad menos que la primera.

		II		
		M	I	m
I	M	1	–5	–3
	I	–2	0	1
	m	3	–6	4

La tercera está dominada simplemente.

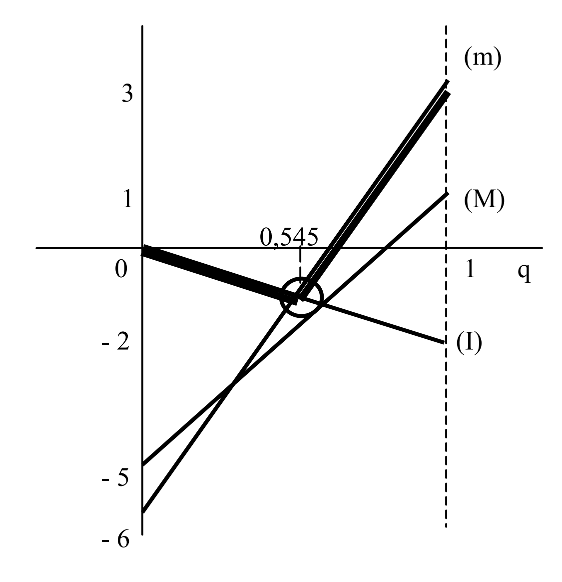
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

			Lo peor
	1	–5	–5
	–2	0	(–2) ← Lo mejor
	3	–6	–6
Lo peor	3	(0) ↑ Lo mejor	

No hay punto de silla. No hay equilibrio con estrategias puras.
Utilizaremos estrategias mixtas:

$$\begin{array}{cc} \underbrace{M} & \underbrace{I} \\ q & 1-q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M) \\ I) \\ m) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} E(II / M) = q - 5 \cdot (1 - q) = 6q - 5 \\ E(II / I) = -2q \\ E(II / m) = 3q - 6 \cdot (1 - q) = 9q - 6 \end{array} \right\}$$



Aplicando el criterio maximín, para "II", de entre lo máximo en que le supera "I", elegimos el mínimo, es decir, el punto de corte entre "I" y "m":

$$-2\ q = 9\ q - 6 \Longrightarrow q = \frac{6}{11}$$

es decir, "II" producirá al máximo en 6 de cada once trimestres, y con producción intermedia en 5 de cada once trimestres.

Por otro lado, la estrategia "M" nunca va a seguirla el jugador "I", ya que es la peor para él, y siempre estaría por debajo de las demás, para todo "q".

$$\begin{array}{lc} & \begin{matrix} \underset{\smile}{M} & \underset{\smile}{I} \end{matrix} \\ \begin{matrix} I) & p \\ m) & 1-p \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \qquad p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-6-3}{-2-0-3-6} = \frac{9}{11}$$

es decir, "I" producirá de forma intermedia en nueve de cada once trimestres, y con producción mínima en dos de cada once trimestres.

El valor del juego sería:

$$-2\ q = -2 \cdot \frac{6}{11} = -\frac{12}{11} = -1{,}09$$

es decir, "I" ganará 1,09 millones de euros menos que "II" en equilibrio en estrategias mixtas.

6.6. Problema de elección de las ciudades donde establecer sucursales bancarias por parte de dos entidades financieras competidoras

Dos entidades financieras se proponen construir, cada una, una sucursal en una región rural en donde se encuentran tres pueblos A, B, C. Las distancias entre los pueblos son las siguientes: la distancia que existe entre el pueblo A y el B es de 12 Km; entre el A y el C es de 25 Km..; entre el B y el C 18 Km.. Se sabe, que aproximadamente, el 40% de la población de

la región vive cerca del pueblo A, el 35% vive cerca del pueblo B y el 25% vive cerca del pueblo C.

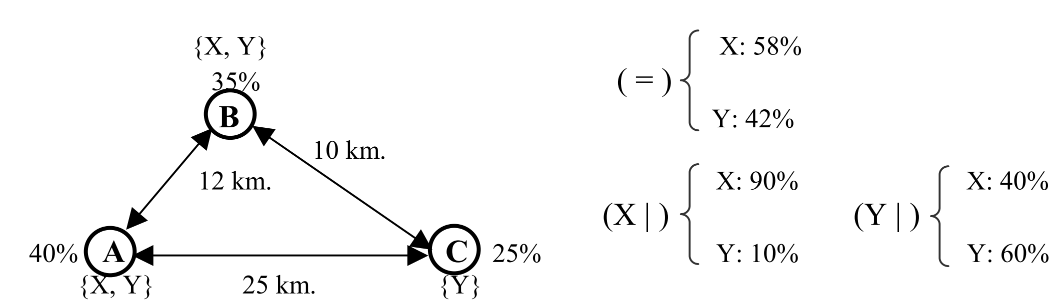
Debido a que la entidad financiera "X" es más grande y tiene más prestigio que la entidad financiera "Y", la entidad financiera "X" controlará la mayoría de los negocios, siempre que sus ubicaciones sean comparativas. Ambas entidades financieras conocen los intereses de la otra en la región y ambas han realizado estudios de mercado que dan proyecciones idénticas. Si ambas entidades financieras se sitúan en el mismo pueblo o equidistantes de un pueblo, la entidad financiera "X" controlará el 58% de los negocios de la comarca. Si la entidad financiera "X" está más cercana a un pueblo que la entidad financiera "Y", la entidad "X" controlará el 90% de los negocios de este pueblo. Si la entidad "X" está más cercana a un pueblo que la entidad financiera "Y", la entidad "X" controlará el 90% de los negocios en este pueblo. Si la entidad "X" está más alejada de un pueblo que la entidad "Y" atraerá la 40% de los negocios en este pueblo. El resto de las operaciones, bajo cualquier circunstancia, irán a ubicarse en pueblos que sean demasiado pequeños y el pueblo C, está dentro de esta categoría.

a. *Elabore la matriz de pagos para estas entidades financieras.*

b. *¿Existe alguna estrategia que esté dominada?*

c. *¿Cuál es el mejor pueblo para ubicarse cada una de las entidades financieras?*

d. *Formule un problema multicriterio para una de las entidades financieras de tal forma que su ubicación sea el pueblo B.*



a)

		Y: A	Y: B	Y: C
X	A	0,58	0,60	0,775
X	B	0,70	0,58	0,775

[X(A); Y(B)] : $0{,}9 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}60$

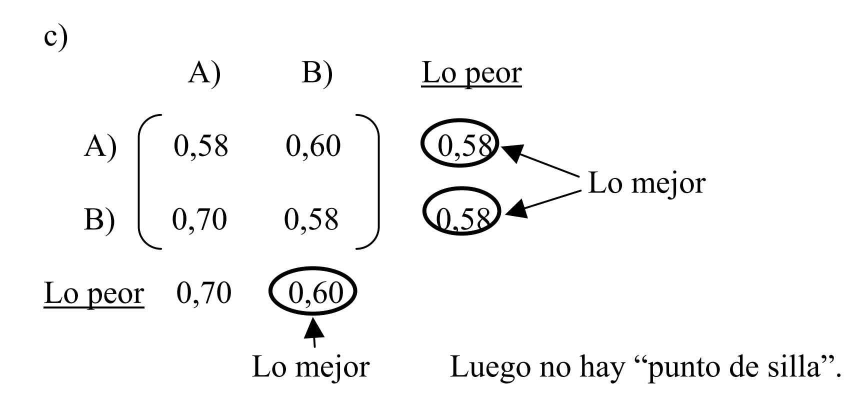
[X(B); Y(A)] : $0{,}9 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 \cdot 0{,}40 + 0{,}9 \cdot 0{,}25 = 0{,}70$

[X(A); Y(C)] : $0{,}9 \cdot (0{,}4 + 0{,}35) + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}775$

[X(A); Y(C)] : $0{,}9 \cdot (0{,}4 + 0{,}35) + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}775$

b) La estrategia “C” de “Y” está dominada.

c)



Luego no hay “punto de silla”.

$$\begin{array}{c|cc} & q & 1-q \\ \hline p & 0,58 & 0,60 \\ 1-p & 0,70 & 0,58 \end{array}$$

$$p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0,58 - 0,70}{0,58 - 0,60 - 0,70 + 0,58} = 0,857$$

$$q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0,58 - 0,60}{0,58 - 0,60 - 0,70 + 0,58} = 0,143$$

Por tanto, “X” se instalaría en el pueblo “A” e “Y” se instalaría en el pueblo “B”.

d) Puede haber infinitas soluciones. Elegiremos unos atributos y unos valores al azar para la entidad “Y”:

Atributo	Distancia	Beneficio	Costes
Sentido	Minimizar	Maximizar	Minimizar
Pesos	0,33	0,33	0,33
~~A~~	~~20~~	~~50.000~~	~~10.000~~
B	10	100.000	5.000
~~C~~	~~40~~	~~20.000~~	~~20.000~~

La alternativa “A” estaría dominada.

La alternativa “C” estaría dominada.

La entidad “Y” elegiría establecerse en la ciudad “C”.

6.7. Problema del juego de los "chinos"

Dos jugadores participan en el siguiente juego: cada jugador tiene dos monedas de un euro en la mano, y puede enseñar una o las dos, y además debe manifestarse en relación al número de monedas que va a enseñar el otro.

Si sólo uno de ellos acierta, ganará una cantidad en euros igual a la suma de las monedas que han enseñado ambos.

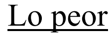
Si aciertan los dos o ninguno, se considera empate, lo que no supondría ni ganancia ni pérdida para ninguno de ellos.

Plantear la matriz del juego, e indicar si existe solución en estrategias puras.

		II			
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
I	(1,1)	0	2	−3	0
	(1,2)	- 2	0	0	3
	(2,1)	3	0	0	−4
	(2,2)	0	−3	4	0

La matriz es obviamente en valor absoluto simétrica, puesto que las alternativas son las mismas para ambos jugadores.

Los valores son opuestos, puesto que lo que gana uno lo pierde el otro.
En cada par ordenado, la primera componente es lo que va a enseñar el jugador, y la segunda componente lo que estima que va a enseñar su oponente.



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \boxed{-2} \\ -4 \\ -3 \end{matrix}$$

← Lo mejor

Lo peor $3 \quad \boxed{2} \quad 4 \quad 3$ $\qquad -2 \neq 2$

↑ Lo mejor

Luego no hay "punto de silla". No existe equilibrio en estrategias puras.

6.8. Problema del juego de los "chinos" con estrategias mixtas

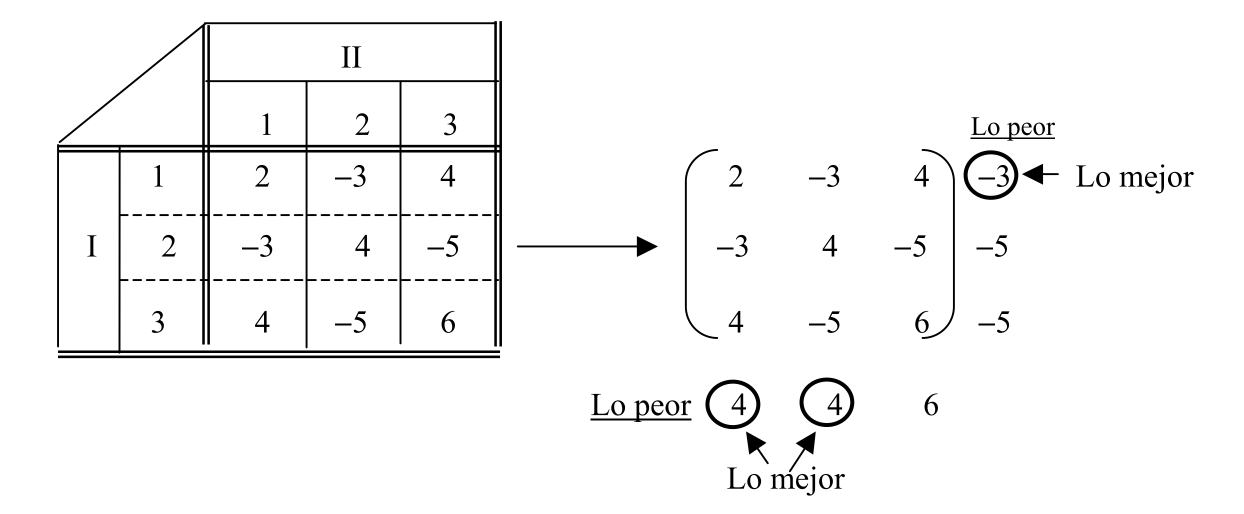
Los jugadores del ejercicio anterior deciden jugar ahora con tres euros, pero enseñando sólo las monedas que apuestan (sin conjeturar sobre lo que hará el otro). Las condiciones de este nuevo juego son las siguientes:

Si la suma de euros mostrados es par, el segundo jugador pagará al primero la suma de las monedas mostradas.

Si la suma de euros mostrados es impar, el primer jugador pagará al segundo dicha suma.

Plantear la matriz del juego, e indicar si existe solución en estrategias puras.

Poner un ejemplo de una posible estrategia mixta que podría seguir el jugador I.



		II: 1	II: 2	II: 3
I	1	2	–3	4
I	2	–3	4	–5
I	3	4	–5	6

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix}$$

Lo peor: 4, 4, 6

No hay punto de silla. No hay equilibrio con estrategias puras.

Si "I" jugara, por ejemplo, 332 – 332 – 332, "II" podría vencerle jugando, 223 – 223 – 223.

Si "I" siguiera por ejemplo, la estrategia mixta (1/6; ⅓; ½), es decir, un euro una de cada seis veces, dos euros dos de cada seis veces y tres euros, tres de cada seis veces que jugara, obtendría el siguiente beneficio esperado:

$$E(I / 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 + \tfrac{1}{3} \cdot (-3) + \tfrac{1}{2} \cdot 4 = \frac{4}{3}$$

$$E(I / 2) = \frac{1}{6} \cdot (-3) + \tfrac{1}{3} \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot (-5) = -\frac{5}{3}$$

$$E(I / 3) = \frac{1}{6} \cdot 4 + 1/3 \cdot (-5) + 1/2 \cdot 6 = 2$$

teniendo esta expectativa de beneficios, en función de cómo juegue “II”.

No hay equilibrio en estrategias mixtas.

6.9. Problema de extracción de bolas de colores de una urna

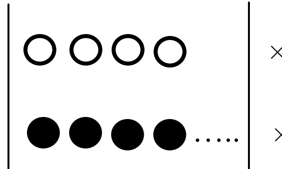
En una urna opaca hay el mismo número de bolas blancas y negras. El jugador I selecciona al azar una bola, y observa su color sin mostrarla al jugador II.

Si la bola es blanca, el jugador I manifiesta “tengo una bola blanca”, y el jugador II tiene que pagarle un euro.

Si la bola es negra, el jugador I dice “tengo una bola negra”, y tiene que pagar al jugador II, un euro. No obstante, el jugador I puede mentir, y decir “tengo una bola blanca”, en cuyo caso, el jugador II le pagaría un euro.

Siempre que el jugador I cobra un euro, el jugador II puede pagarle, o bien puede dudar de que la bola sea blanca, tal y como ha afirmado el jugador I. Si el jugador II manifiesta su duda, el jugador I debe obligatoriamente mostrar la bola extraída. Si es en realidad blanca, el jugador II tendrá que pagar al jugador I dos euros en lugar de uno; si fuera negra, el jugador I tendría que pagar al jugador II dos euros.

Plantear la matriz del juego, e indicar si existe una solución en estrategias puras o en estrategias mixtas.



× n Se trata de un juego de suma nula.

× n Las consecuencias son variables aleatorias, que se reemplazan por sus valores esperados.

		JUGADOR 2	
		Creer	No Creer
JUGADOR 1	Verdad	α 0	β ½
	Mentira	γ 1	δ 0

$E(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$

igualdad de bolas en la urna.

$E(\beta) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (-1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}$

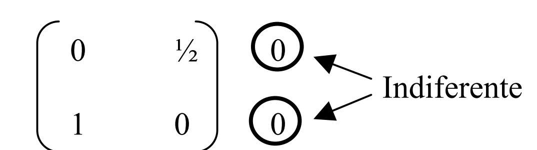
cuando es negra, el jugador II no lo duda. — cuando es blanca, el jugador II duda y pierde siempre.

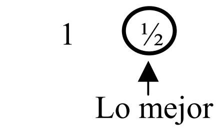
$E(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$

$E(\delta) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (-2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2} = 0$

cuando es negra, y dice blanca. — cuando es blanca, y II no se lo cree.

Lo peor





Luego no hay "punto de silla". Utilizaremos estrategias mixtas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0 - 1}{0 - \frac{1}{2} - 1 + 0} = \frac{2}{3} \\ q &= \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0 - \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2} - 1 + 0} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

Luego, en dos veces de cada tres, el jugador "I" dirá la verdad, y una vez de cada tres, el jugador "II" se creerá lo que le dice el jugador "I".

El valor del juego sería el siguiente:

r_{ij}	$P(r_{ij})$
0	$p \cdot q = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
½	$p \cdot (1-q) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
1	$(1-p) \cdot q = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
0	$(1-p) \cdot (1-q) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
	1

$$E(r) = 0 \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

La expectativa de beneficio del jugador "I" es de un tercio de euro por jugada, que pagará al jugador "II".

6.10. Problema de las estrategias de licitación de solares en el mercado inmobiliario

Dos empresas, Shark y Vulture, están luchando por conseguir aumentar su cuota en el competitivo mercado inmobiliario de la cuidad de Metrópolis. Las dos empresas tienen que elegir entre la promoción de inmuebles para oficinas, centros comerciales y de ocio y viviendas unifamiliares.

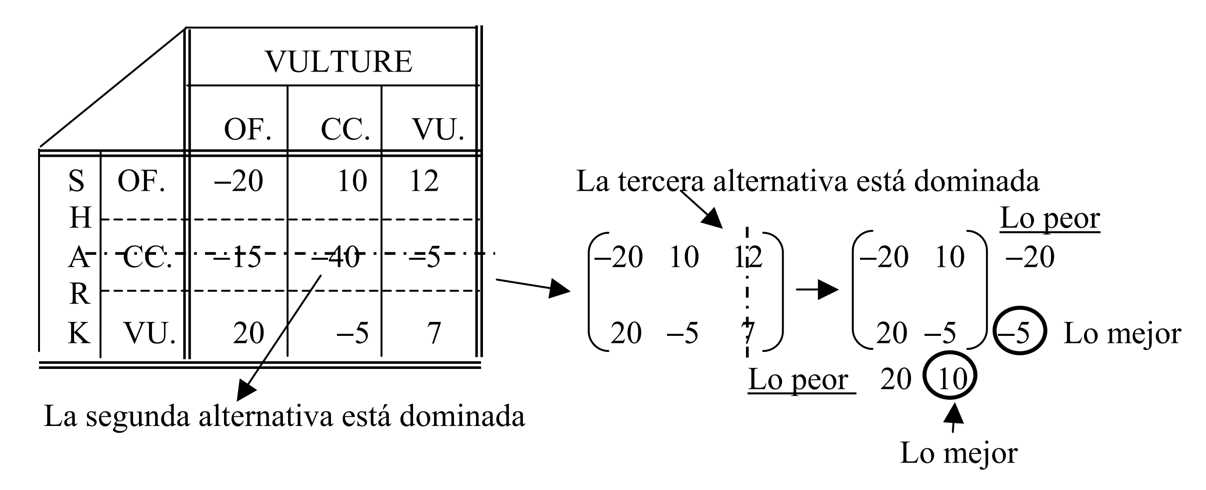
El Ayuntamiento va a sacar a licitación un conjunto de solares para cada tipo de actividad, y las empresas planean sus estrategias de cara a las sucesivas subastas. En cada ocasión el Ayuntamiento subasta tres solares, uno de cada tipo, y las expectativas de beneficio en las futuras promociones dependerán de la competencia en la subasta y de la gestión de la construcción aunque en cualquier caso, el precio del suelo es el factor determinante. Las empresas estiman los siguientes beneficios en miles de euros en función de que su competidora puje fuerte o no en las subastas:

		Vulture		
		Of	*Cc*	*Vu*
Shark	*Of*	*–20*	*10*	*12*
	Cc	*15*	*–40*	*5*
	Vu	*20*	*–5*	*7*

a. *Establecer cuales serían las estrategias factibles para ambas empresas.*

b. *Estudie si existe un valor único de este juego.*

c. *¿Habría una estrategia mixta que siguieran de manera unívoca ambas empresas? Explicar en qué consistiría dicha estrategia.*



No hay punto de silla. No hay equilibrio con estrategias puras.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} & \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-5 - 20}{-20 - 10 - 20 - 5} = \frac{5}{11}$$

$$q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-5 - 10}{-20 - 10 - 20 - 5} = \frac{3}{11}$$

Luego, Shark, en 5 de cada 11 subastas, acudiría a inmuebles de oficinas, y en 6 de cada 11, a viviendas unifamiliares.

Por su parte, Vulture, en 3 de cada 11 subastas acudiría a inmuebles de oficinas, y en 8 de cada 11 a centros comerciales.

El valor del juego sería el siguiente:

r_{ij}	$P(r_{ij})$
–20	$p \cdot q = \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{11} = \frac{15}{121}$
10	$p \cdot (1-q) = \frac{5}{11} \cdot \frac{8}{11} = \frac{40}{121}$
20	$(1-p) \cdot q = \frac{6}{11} \cdot \frac{3}{11} = \frac{18}{121}$
–5	$(1-p) \cdot (1-q) = \frac{6}{11} \cdot \frac{8}{11} = \frac{48}{121}$
	1

$$E(r) = (-20) \cdot \frac{15}{121} + 10 \cdot \frac{40}{121} + 20 \cdot \frac{18}{121} + (-5) \cdot \frac{48}{121} = \frac{220}{121} = 1{,}82$$

La expectativa de beneficio es de 1.820 € a favor de Shark.

6.11. Problema del juego de los chinos con una sola moneda

En un juego variante del de los "chinos", dos amigos acuerdan jugar con una moneda de un euro, de forma que cada uno puede tener una o ninguna moneda en la mano, y cantar la suma de las monedas que tendrán entre los dos.

Como es bien sabido, gana aquel que acierte dicha suma, llevándose la misma como premio, y en el caso de que los dos acertasen, ninguno gana ni pierde.

Además, se establecen como penalizaciones para el caso de que ninguno acierte la suma total de monedas, que aquel que cante como suma más monedas que el otro, y no acierte, pagará al otro 1 € por moneda sacada.

Si el primer jugador ha decidido sacar "blanca" y cantar "blanca" un tercio de las veces, sacar "blanca" y "cantar"1 € un tercio de las veces, y sacar 1 € y cantar 2 € una sexta parte de las veces, y el otro se ha enterado subrepticiamente, ¿cuál sería la mejor estrategia a seguir por el otro jugador, y cuál el valor del juego?

I \ II	(Ø,Ø)	(Ø,1)	(1,1)	(1,2)
(Ø,Ø)	0	1	–1	1
(Ø,1)	–1	0	0	1
(1,1)	1	0	0	–2
(1,2)	–1	–1	2	0

(a,b) : a: monedas que saca.
b: suma de monedas que canta.

Lo peor

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \textcircled{-1} \\ \textcircled{-1} \\ -2 \\ \textcircled{-1} \end{matrix}$$

← Lo mejor

Lo peor ① ① 2 ① $-1 \neq 1$

Lo mejor

Luego no hay "punto de silla". No existe equilibrio en estrategias puras.

Si "I" siguiera la estrategia mixta (⅓; 1/6; ⅓;1/6), y "II" lo averigua, la expectativa de beneficio de este último sería:

$$E(II / (Ø,Ø)) = (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$E(II / (Ø,1)) = 1 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$E(II / (1,1)) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$E(II / (1,2)) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + (-2) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$
I \left\{ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/6 \\ I \\ 1/3 \\ 1/6 \end{array} \right. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
E(II): \quad 0 \quad 1/6 \quad 0 \quad \boxed{-1/6}
$$

"II" jugará siempre (1,2), ya que su expectativa de beneficio es de 1/6 en media por cada jugada, que le pagará "I".

6.12. Problema de estrategia para ganancia de cuota en un mercado duopolista entre dos compañías dedicadas a la fabricación y distribución de regalos de empresas

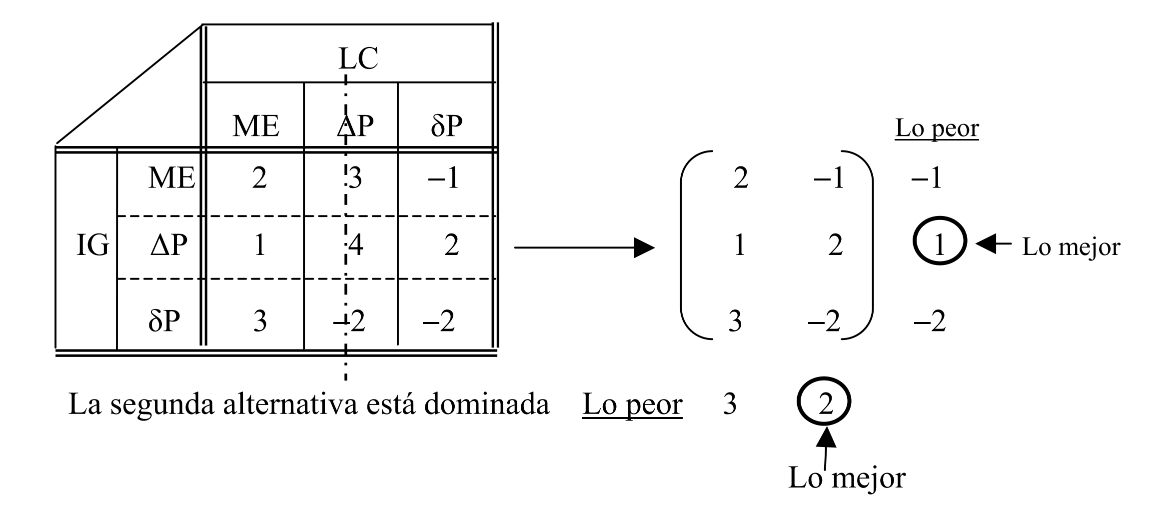
Dos compañías, Imperial Gifts y Luxury Cadeaux, comparten el mercado de regalos de empresa en una determinada zona geográfica. Cada una de las entidades está preparando el presupuesto de ventas y de marketing para el próximo ejercicio económico, y ambas desean ganar cuota de mercado a la otra compañía.

Las entidades pueden mejorar el embalaje de sus productos, intensificar sus campañas publicitarias o disminuir el precio de sus productos, como herramientas de gestión.

El efecto estimado de cada alternativa en aumento o disminución de cuota (en %) para Imperial Gifts (el opuesto para Luxury Cadeaux) sería el siguiente:

		Luxury Cadeaux		
		MejoraEmbalaje	*Δ Publicidad*	*δ Precio*
Imperial Gifts	*MejoraEmbalaje*	*2%*	*3%*	*–1%*
	Δ Publicidad	*1%*	*4%*	*2%*
	δ Precio	*3%*	*–2%*	*–2%*

¿Cuál es la estrategia óptima para cada empresa, y cuál el valor del juego?



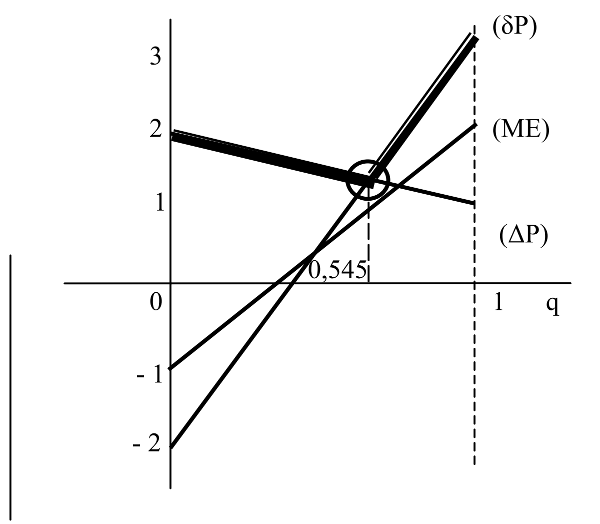
IG \ LC	ME	ΔP	δP
ME	2	3	−1
ΔP	1	4	2
δP	3	−2	−2

No hay punto de silla. No hay equilibrio con estrategias puras

Utilizaremos estrategias mixtas:

$$\begin{array}{ccc} & \underbrace{ME}_{q} & \underbrace{\delta P}_{1-q} \\ ME) & 2 & -1 \\ \Delta P) & 1 & 2 \\ \delta P) & 3 & -2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} E(II / ME) = 2q - 1 \cdot (1 - q) = 3q - 1 \\ E(II / \Delta P) = q + 2 \cdot (1 - q) = 2 - q \\ E(II / \delta P) = 3q - 2 \cdot (1 - q) = 5q - 2 \end{array}\right\}$$



Aplicando el criterio maximín, para "LC", de entre lo máximo en que le supera "IG", elegimos el mínimo, es decir, el punto de corte entre "ΔP" y "δP":

$$2 - q = 5\,q - 2 \Rightarrow q = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

es decir, "LC" mejorará el embalaje con un 66% de probabilidades, y disminuirá precio con un 33% de probabilidades.

Por otro lado, la estrategia de mejorar el embalaje, "ME", nunca va a seguirla Imperial Gifts, ya que es la peor para ella, y siempre estaría por debajo de las demás, para todo "q".

$$\begin{array}{ll} & \quad \underbrace{ME} \quad \underbrace{\delta P} \\ \Delta P) \quad p & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \delta P) \quad 1-p & \end{array} \qquad p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-2-3}{1-2-3-2} = \frac{5}{6}$$

es decir, "IG" incrementará la publicidad con un 83% de probabilidades, y disminuirá precio con un 16% de probabilidades.

El valor del juego sería:

$$2 - q = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}33$$

es decir, Imperial Gifts ganará 1,33% de cuota de mercado a Luxury Cadeaux en equilibrio en estrategias mixtas.

6.13. Problema de estrategia de precios y servicios entre dos compañías de vuelo charter para captar un mayor número de clientes

Dos compañías aéreas charter, Leisure Flights y Tropical Pleasure, tienen la concesión de vuelos a la isla Mauricio desde España. La competencia es muy dura y la primera de ellas tiene pérdidas de explotación, planteándose tres posibilidades de actuación para mejorar la gestión del negocio, aun a costa de perder cuota a favor de la segunda: Suprimir la comida gratuita, Dejar de ofrecer bebidas gratis y Subir el precio de los billetes.

Por su parte, Tropical Pleasure tiene tres opciones para aprovechar la coyuntura: Mantener su política actual de precios y servicios, disminuir el precio de los billetes u ofrecer descuentos a los touroperadores.

Las empresas estiman que la ganancia de cuota para Tropical Pleasure será la siguiente, en función de las estrategias que adopten ambas empresas:

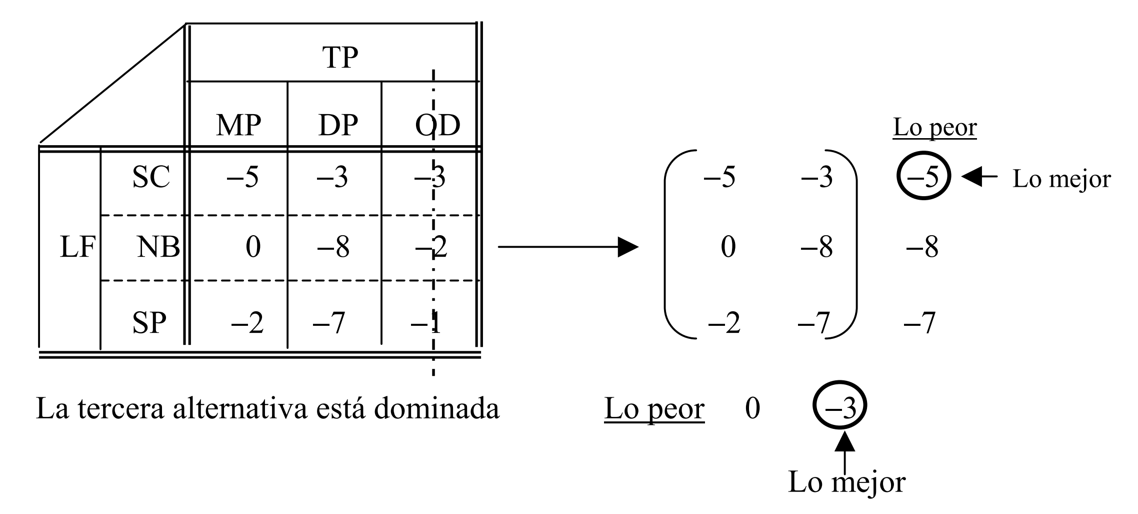
		Tropical Pleasure		
		Mantener política	*Disminuir Precio*	*Ofrecer descuentos*
Leisure Flights	*Suprimir Comida*	*–5%*	*–3%*	*–3%*
	No bebidas gratis	*0%*	*–8%*	*–2%*
	Subir Precio	*–2%*	*–7%*	*–1%*

Indicar si las siguientes afirmaciones son o no verdaderas:

a) *Si ambas compañías utilizaran estrategias puras, el valor del juego es –4%.*

b) *La mejor estrategia para Tropical Pleasure es ofrecer descuentos a los touroperadores, y la mejor estrategia para Leisure Flights es subir el precio de los billetes.*

c) *La menor probabilidad de elección en estrategias mixtas es la de Suprimir Comida para Leisure Flights y la de Mantener política para Tropical Pleasure.*



		TP		
		MP	DP	OD
LF	SC	–5	–3	–3
	NB	0	–8	–2
	SP	–2	–7	–1

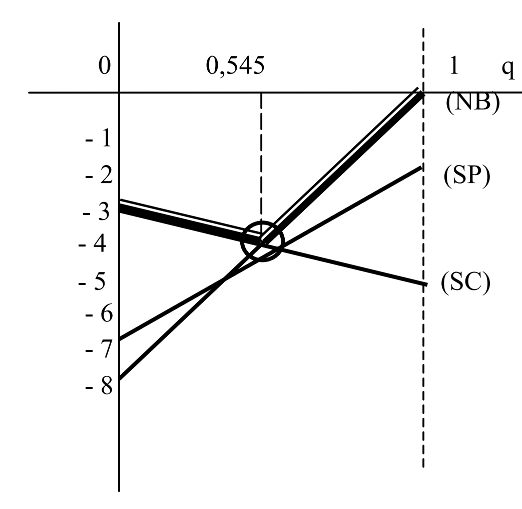
La tercera alternativa está dominada

a) No hay punto de silla. No hay equilibrio con estrategias puras. Luego, el valor del juego no puede ser 4.

b) Es falsa, puesto que la estrategia de ofrecer descuentos a los touroperadores está dominada. Además, la solución del juego estará en estrategias mixtas, luego una estrategia pura no puede ser la solución del problema para ninguna de las compañías aéreas.

Utilizaremos estrategias mixtas:

$$\begin{array}{c} \\ SC) \\ NB) \\ SP) \end{array} \begin{array}{c} \underbrace{MP}_{q} \quad \underbrace{DP}_{1-q} \\ \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -8 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} E(II / SC) = -5q - 3 \cdot (1 - q) = -2q - 3 \\ E(II / NB) = 0 \cdot q - 8 \cdot (1 - q) = 8q - 8 \\ E(II / SP) = -2q - 7 \cdot (1 - q) = 5q - 7 \end{array} \right\}$$



Aplicando el criterio maximín, para “TP”, de entre la menor cuota que pierde “LF”, elegimos la mayor, es decir, el punto de corte entre “SC” y “NB”:

$$-2q - 3 = 8q - 8 \Rightarrow q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

es decir, “TP” mantendría su actual política y disminuirá el precio de los billetes, con con un 50% de probabilidades en cada caso.

Por otro lado, la estrategia de subir el precio, “SP”, nunca va a seguirla Leisure Flights, ya que es la peor para ella, y siempre perdería más cuota de mercado, para todo “q”.

$$\begin{array}{ll} & \quad\ \ \text{MP} \quad \text{DP} \\ \text{SC)} & p \\ \text{NB)} & 1-p \end{array} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-8 - 0}{-5 + 3 - 0 - 8} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

es decir, Leisure Flights suprimirá la comida gratuita con un 80% de probabilidades, y dejará de dar bebidas gratis con un 20% de probabilidades.

c) Por tanto, la tercera afirmación también es falsa, ya que para Leisure Flights la peor alternativa no es suprimir la comida gratuita, ni para Tropical Pleasure la de mantener su política.

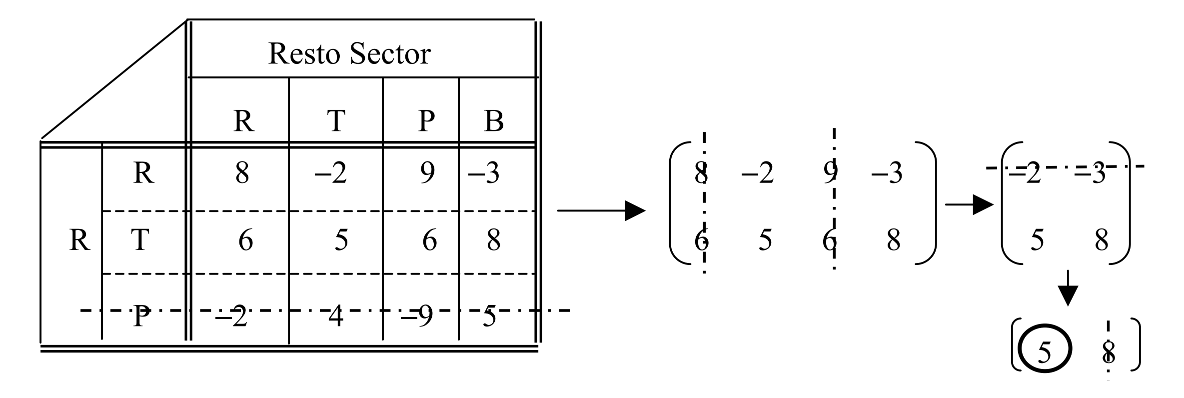
6.14. Problema de estrategia marketing para captar una cuota de mercado a la competencia

Una empresa del sector del automóvil, Rollerball, tiene establecidas para su próxima campaña del lanzamiento del “Spiderwoman”, tres posibles acciones de publicidad y marketing: radio, televisión y prensa. El resto de las empresas del sector utilizan como acciones las tres anteriores y el buzoneo con ofertas en folletos.

Dependiendo de la estrategia de esta empresa, y de la que tomen las otras empresas para la campaña de verano, se estima que la cuota de la empresa en el mercado de utilitarios destinados al público femenino variará de la siguiente forma:

		Resto Sector			
		Radio	*Televisión*	*Prensa*	*Buzoneo*
Rollerball	*Radio*	*8%*	*–2%*	*9%*	*–3%*
	Televisión	*6%*	*5%*	*6%*	*8%*
	Prensa	*–2%*	*4%*	*–9%*	*5%*

¿Cuál es la acción de publicidad y marketing más adecuada para la empresa, y para el resto del sector?



Luego, la empresa Rollerball, elegiría la televisión como medio más adecuado para lanzar el nuevo coche “Spiderwoman”, mientras que el resto del sector también utilizaría la televisión para contrarrestar la agresiva campaña de Rollerball.

6.15. Problema de estrategia de los gangsters de New York durante la “Ley Seca”

Lucky Luciano y Dutch Schultz están planificando en 1928 sus estrategias para controlar el negocio de distribución de alcohol en la ciudad de New York. El punto clave es localizar lugares donde montar los centros de almacenaje, de forma que estos pasen desapercibidos tanto para la policía como para la “competencia”, entendiendo por tal a la otra banda de gangsters.

Luciano ha establecido tres posibles nuevos lugares de almacenaje, uno en Brooklyn, otro en Queens y otro en Staten Island. Schultz considera como más adecuados Little Italy, el Bronx o Harlem.

En 1928, el negocio del alcohol ilegal en New York supone para las dos bandas de gangsters 10 millones de dólares al año. El establecimiento del nuevo almacén puede suponer los siguientes aumentos o disminuciones de ingresos a cargo o a favor de la otra banda en función de la ubicación, y de la actuación de la policía:

		Dutch Schultz		
		Little Italy	*Bronx*	*Harlem*
Lucky Luciano	*Brooklyin*	*–500.000*	*800.000*	*600.000*
	Queens	*400.000*	*–300.000*	*200.000*
	Staten Island	*–1.000.000*	*700.000*	*–100.000*

a) ¿Estaría dispuesto Lucky Luciano a sobornar con 400.000 $ a la policía para que no interviniera en sus asuntos y sí en los de Dutch Schultz?

b) ¿Qué estrategia elegiría cada banda de gangsters?

c) Si Dutch Schultz decidiera con carácter previo a la decisión final, no establecer el nuevo almacén en Harlem, ¿variarían las decisiones finales a tomar por ambos "capos"?

d) Si el negocio del alcohol se repartía antes de la instalación del nuevo almacén en la proporción 60% - 40% para Luciano y Schultz respectivamente, ¿cuál sería la expectativa de beneficio anual que tendrían ambos gangsters después de establecer los nuevos almacenes?

a) Planteamos la matriz en centenares de miles de dólares para simplificar:

		Schultz		
		L	B	H
Luciano	B	–5	8	6
	Q	4	–3	2
	S	–10	7	–1

La tercera alternativa está dominada

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

			Lo peor
–5	8	6	–5
4	–3	2	(–3) ← Lo mejor
Lo peor: (4)	8	6	

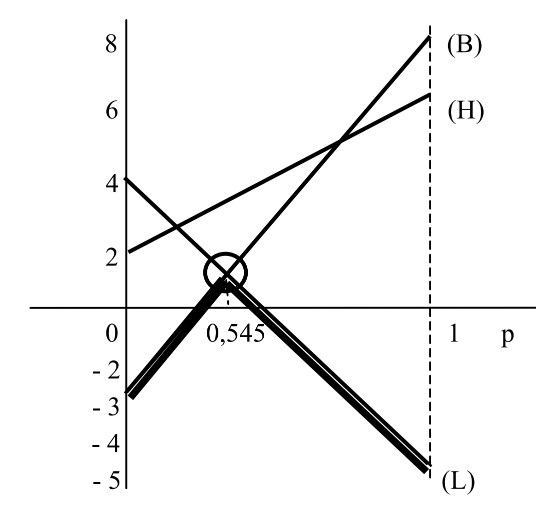
Lo mejor: 4

a) No hay punto de silla. No hay equilibrio con estrategias puras. La pérdida máxima para Lucky Luciano sería de 300.000 $, por lo que no tendría sentido que se gastara 400.000 $ en sobornar a la policía.

b) Utilizaremos estrategias mixtas:

$$\begin{array}{ll} & \quad L \quad\; B \quad\; H \\ B)\ \ p & \begin{pmatrix} -5 & 8 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ Q)\ 1-p & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} E(I / L) = -5p + 4 \cdot (1 - p) = -9p + 4 \\ E(I / B) = 8 \cdot p - 3 \cdot (1 - p) = 11p - 3 \\ E(I / H) = 6p + 2 \cdot (1 - p) = 4p + 2 \end{array}\right\}$$



Aplicando el criterio maximín, para Luciano, de entre las mayores pérdidas, elige las menores, es decir, el punto de corte entre “L” y “B”:

$$-9p + 4 = 11p - 3 \Rightarrow p = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

es decir, Luciano establecería en Brooklyn el almacén, con un 35% de probabilidades, y en Queens con un 65% de probabilidades.

Por otro lado, la estrategia de establecer su almacén en Harlem, nunca va a seguirla Dutch Schultz, ya que es la peor para él, y siempre daría más ingresos a Luciano, para todo “p”.

$$\begin{array}{c} \\ B) \\ Q) \end{array} \begin{array}{c} \underbrace{L}_{q} \quad \underbrace{B}_{1-q} \\ \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{-3 - 8}{-5 - 8 - 4 - 3} = \frac{11}{20} = 0{,}55$$

Es decir, Dutch Schultz situaría su nuevo almacén en Little Italy con un 55% de probabiliddes, y en el Bronx con un 45% de probabilidades.

c) En el apartado anterior hemos visto, que nunca debería Schultz instalarse en Harlem, por lo que si a priori elimina esta posibilidad, no se verían alteradas las estrategias finales adoptadas por ambos gangsters.

d) Antes del establecimiento de los nuevos almacenes, Luciano se llevaba 6 millones de dólares al año, y Schultz 4 millones de dólares.

Partiendo de estas cifras, y dado que el consumo de alcohol no varía entre los consumidores, habrá que ver en que medida uno de los gangster ha conseguido quitarle negocio al otro.

Para ello, calculamos cuál es el valor del juego:

$$E(I / L) = -9p + 4 = -9 \cdot 0{,}35 + 4 = 0{,}85$$

es decir, Luciano tiene la expectativa de conseguir ganar 85.000 $ más al año con su nuevo almacén, que perderá Schultz, al ser un juego de suma nula.

Por tanto, la expectativa de Luciano es de 6.085.000 $, y la de Schultz 3.915.000 $ (Luciano mandó finalmente matar a Schultz, por lo que al final se quedó con todo el negocio de New York).

6.16. Problema de estrategia de bombardeo aéreo en la Segunda Guerra Mundial

En 1943, Sir Arthur Harris, responsable de la RAF británica planea bombardear la industrial Cuenca del Ruhr en Alemania, y Hermann Goering, responsable de la Luftwaffe alemana, se apresta a defender su territorio. Harris dispone de dos escuadrillas para este fin, y Goering de tres compañías de defensa antiaérea.

Para que el objetivo sea destruido, bastaría con que una de las dos escuadrillas se abriera paso a través de las defensas antiaéreas y lanzase las bombas. Harris tiene tres posibles rutas de aproximación a la zona industrial que constituye su objetivo. Goering lo sabe, y tiene que instalar sus baterías antiaéreas en consonancia, dado que las defensas sólo tendrán en su radio de alcance a los aviones que vengan por una de las rutas de aproximación.

Cada batería antiaérea tiene munición suficiente para disparar sólo contra una escuadrilla, pero cuando lo hace, y habida cuenta de que tienen que aproximarse mucho para lograr acertar el objetivo, los aviones de esa escuadrilla son destruidos con total probabilidad. De ahí la importancia de elegir una ruta adecuada.

Las incursiones aéreas se van a producir todas las noches durante un mes.

a) ¿Cuáles deberían ser las estrategias de Harris y Goering, y cuál el resultado de la incursión aérea?

Transcurridos los primeros diez días, Harris encuentra una cuarta ruta de aproximación al objetivo, y los espías de Goering le informan de este hecho, por lo que el general alemán decide incorporar una cuarta batería antiaérea.

b) ¿Cuáles deberían ser a partir de entonces las estrategias de Harris y Goering, y cuál el resultado de las incursiones aéreas de esta segunda fase?

Los espías de Harris descubren que en Peenemunde (cerca del Ruhr) están los alemanes fabricando una bomba atómica, por lo que deciden hacer una incursión con dos grandes bombarderos, uno que llevará una gran bomba y otro que hará de escolta del primero. Goering es avisado tarde por sus espías, por lo que sólo puede enviar un Messerschmidt (caza alemán) desde una base cercana.

Los dos bombarderos, aunque iguales en apariencia para que el enemigo no sepa cuál de los dos llevará la bomba, están pertrechados con diferente armamento. Si el Messerschmidt ataca al bombardero de escolta, Harris ha determinado que sea sólo este avión el que mantenga la lucha con el caza alemán, dando tiempo al bombardero que lleva la bomba a que alcance su objetivo. En ese caso, se estima que el caza alemán, más ágil que el bombardero conseguirá derribar a este último con un 70% de probabilidades. Ello le permitirá dirigir su fuego contra el bombardero inglés que lleva la bomba, aunque al estar dañado y tener menos munición disponible, se estima que podrá derribarlo en este caso con un 60% de probabilidades.

Sin embargo, si el Messerschmidt ataca al bombardero que lleva la bomba, entonces, se defenderán los dos aviones ingleses, atacando con fuego cruzado al caza alemán, por lo que se estima que conseguirán derribar a este último con un 70% de probabilidades.

c) Si los bombarderos van uno detrás del otro, ¿en cuál se debería emplazar la bomba?

d) ¿A cuál de los dos bombarderos debería atacar el Messerschmidt?

a)

		Goering		
		B_1	B_2	B_3
Harris	A_1	0	⅓	1
	A_2	1	⅔	⅔

A_1: Harris envía cada escuadrilla en una ruta diferente.
A_2: Harris envía ambas escuadrillas por la misma ruta.
B_1: Goering coloca una batería en cada ruta.
B_2: Goering coloca dos baterías en una ruta y una en otra ruta.
B_3: Goering coloca las tres baterías en una ruta.

[H(A_1); G(B_1)] : 0, ya que ninguna escuadrilla se podría abrir paso, y Goering las destruiría.
[H(A_1); G(B_2)] : ⅓, ya que sólo pasaría una de las escuadrillas en el caso de que eligiera situar a una de las escuadrillas por la ruta en la que no hay defensa antiaérea.
[H(A_1); G(B_3)] : 1, ya que si Goering coloca la tres baterías en una ruta, habría dos libres, y al menos por una de ellas entraría la escuadrilla y destruiría el objetivo.
[H(A_2); G(B_1)] : 1, ya que Goering destruiría la primera escuadrilla, pero la segunda pasaría por la misma ruta y llegaría a su objetivo.
[H(A_2); G(B_2)] : ⅔, ya que sólo sería derribada en el caso de que pasara por la ruta en la que Goering ha emplazado dos baterías.
[H(A_2); G(B_3)] : 1, ya que sólo sería derribada en el caso de que pasara por la ruta en la que Goering ha emplazado tres baterías.

Evidentemente, la tercera alternativa de Goering está dominada, aunque no sólo por las cifras que se indican, sino por la lógica. No tiene sentido emplazar las tres baterías en una de las rutas, puesto que la tercera nunca tendría utilidad.

	B_1	B_2	Lo peor
A_1)	0	⅓	0
A_2)	1	⅔	(⅔) ← Lo mejor
Lo Peor	1	(⅔) ↑ Lo mejor	

Por tanto, Harris enviará los dos aviones por la misma ruta, y Goering situará dos baterías juntas en una de las rutas y una en otra. Con ese planteamiento, Harris conseguirá pasar los antiaéreos y bombardear su objetivo en dos de cada tres incursiones.

b)

		Goering				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
Harris	A_1	0	5/6	½	5/6	1
	A_2	1	½	¾	¾	¼

A_1: Harris envía cada escuadrilla en una ruta diferente.
A_2: Harris envía ambas escuadrillas por la misma ruta.
B_1: Goering coloca una batería en cada ruta.
B_2: Goering coloca dos baterías en una ruta y otras dos en otra ruta.
B_3: Goering coloca las dos baterías en una ruta, una en otra y una en otra.
B_4: Goering coloca tres baterías en una ruta y una en otra.
B_5: Goering coloca las cuatro baterías en una ruta.

[H(A_1); G(B_1)] : 0, ya que ninguna escuadrilla se podría abrir paso, y Goering las destruiría.

[H(A_1); G(B_2)] : 5/6, ya que si hay cuatro rutas, y Harris envía dos escuadrillas por dos rutas diferentes, hay seis posibilidades de elegir dos rutas de entre cuatro (combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos), y de esas seis posibilidades, sólo en una de ellas podrá Goering derribar las dos escuadrillas, cuando Harris las mande por las dos rutas en las que tiene Goering dos baterías en cada una de esas rutas precisamente (casos favorables 1; casos posibles 6).

$[H(A_1); G(B_3)]$: ½, ya que sigue habiendo seis combinaciones para Harris, y de entre ellas, en tres de ellas (aquellas en las que una de las rutas elegidas sea en la que Goering no ha colocado ninguna batería; esa ruta y cualquiera de las otras tres), Harris conseguirá pasar (casos favorables 3; casos posibles 6).

$[H(A_1); G(B_4)]$: 5/6, ya que colocar 3+1 es lo mismo que colocar 2+2, en el caso de que Harris mande una escuadrilla por cada ruta.

$[H(A_1); G(B_5)]$: 1, ya que si Goering coloca las cuatro baterías en una sola ruta, al menos una de las escuadrillas de Harris pasaría seguro y destruiría el objetivo.

$[H(A_2); G(B_1)]$: 1, ya que Goering destruiría la primera escuadrilla, pero la segunda pasaría por la misma ruta y llegaría a su objetivo.

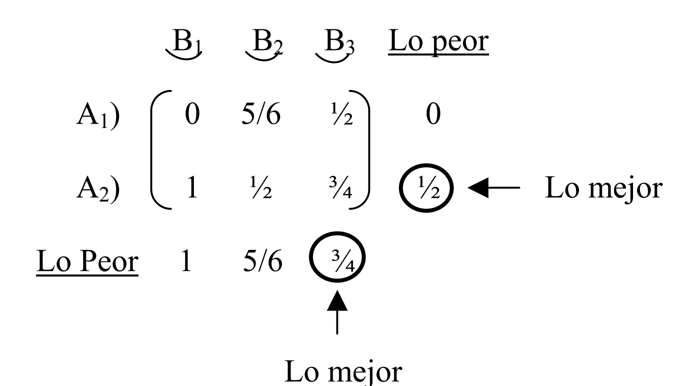
$[H(A_2); G(B_2)]$: ½, ya que sólo sería derribada en el caso de que pasara por una de las dos rutas en las que Goering ha emplazado dos baterías (casos favorables dos; casos posibles 4).

$[H(A_2); G(B_3)]$: ¾, ya que sólo sería derribada en el caso de que pasara por la ruta en la que Goering ha emplazado dos baterías; en las otras tres rutas al menos una de las escuadrillas pasaría.

$[H(A_2); G(B_4)]$: ¾, ya que sólo sería derribada en el caso de que pasara por la ruta en la que Goering ha emplazado tres baterías.

$[H(A_2); G(B_5)]$: ¾, ya que sólo sería derribada en el caso de que pasara por la ruta en la que Goering ha emplazado las cuatro baterías.

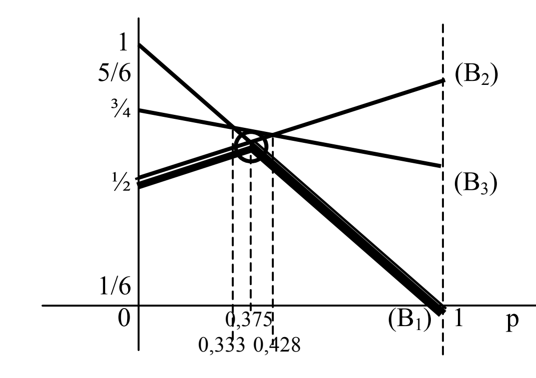
Evidentemente, la cuarta y quinta alternativas de Goering está dominadas, aunque no sólo por las cifras que se indican, sino por la lógica. No tiene sentido emplazar tres o cuatro baterías en una de las rutas, puesto que la tercera y la cuarta baterías nunca tendrían utilidad.



No hay punto de silla, por lo que no habrá equilibrio en estrategias puras.

Utilizamos estrategias mixtas:

$$\begin{array}{ll} & \quad\; B_1 \quad\; B_2 \quad\; B_3 \\ A_1)\; p & \begin{pmatrix} 0 & 5/6 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \\ A_2)\; 1-p & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} E(H / B_1) = 0 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - p \\ E(H / B_2) = 5/6 \cdot p + ½ \cdot (1-p) = ½ + ⅓\, p \\ E(H / B_3) = ½ \cdot p + ¾ \cdot (1-p) = ¾ - ¼ \cdot p \end{array}\right\}$$



Aplicando el criterio maximín, para Harris, de entre los menores porcentajes de éxito en las incursiones, elegiría el mayor de ellos, es decir, el punto de corte entre "B_1"y "B_2":

$$1 - p = ½ + ⅓\, p \Longrightarrow p = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

es decir, Harris mandaría las dos escuadrillas por rutas diferentes, en tres de cada ocho incursiones, y las mandaría por la misma ruta en cinco de cada ocho incursiones.

Por su parte, Goering nunca utilizaría la alternativa "B_3", es decir, colocar dos baterías en una ruta, una en otra ruta y la cuarta en una ruta diferente, ya que para todo "p", Harris conseguiría un mayor porcentaje de éxito en destruir su objetivo.

$$\begin{array}{ll} & \;\; B_1 \quad\; B_2 \\ & \;\;\, q \quad\; 1-q \\ A_1) & \begin{pmatrix} 0 & 5/6 \\ 1 & ½ \end{pmatrix} \\ A_2) & \end{array} \qquad q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{½ - 5/6}{0 - 5/6 - 1 + 1/2} = \frac{1}{4}$$

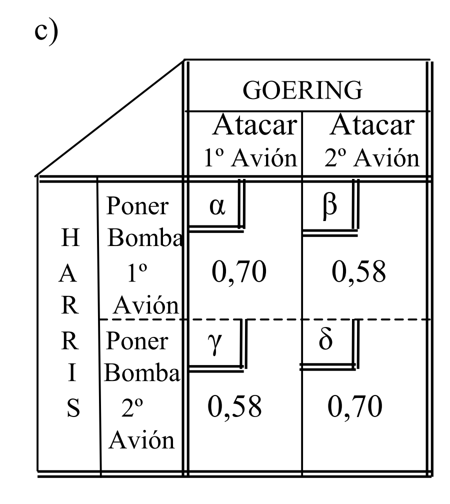
es decir, Goering debería colocar una batería en cada ruta en una de cada cuatro incursiones, y dos baterías en una ruta y dos en otra en tres de cada cuatro incursiones.

Actuando con esta estrategia ambos generales, el resultado de éxito de Harris sería de:

$$E(H / B_1) = 1 - p = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$$

esto es, conseguiría acertar en sus objetivos de bombardeo en un 62,5% de las incursiones.

c)



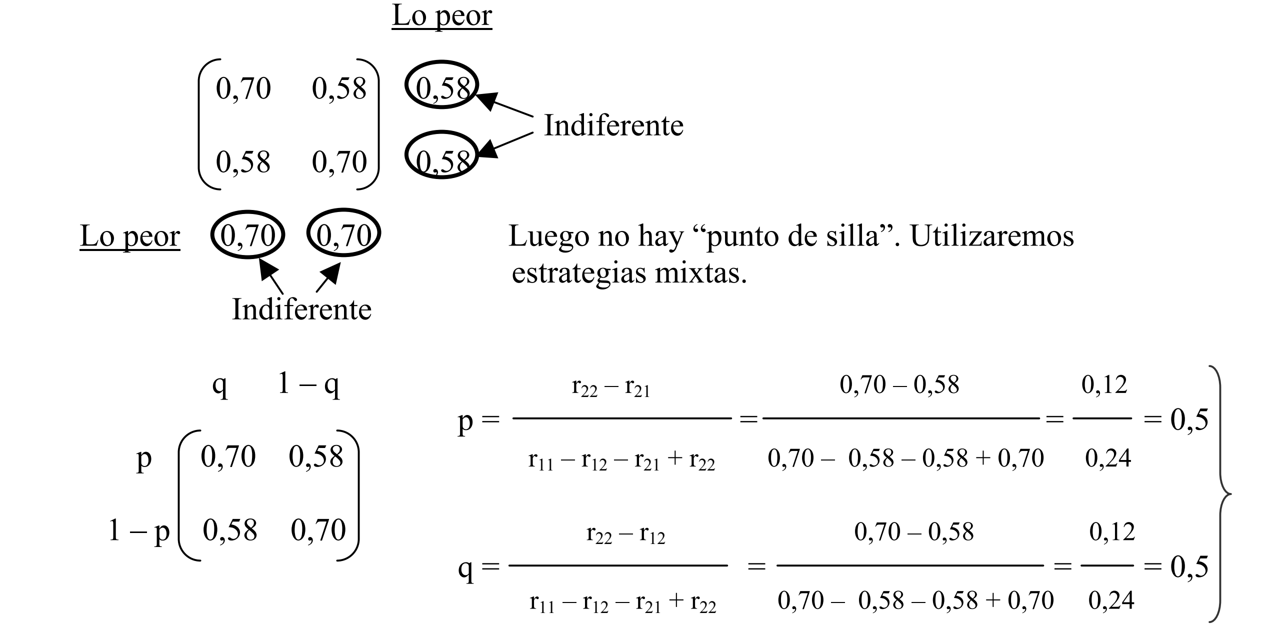
HARRIS \ GOERING	Atacar 1º Avión	Atacar 2º Avión
Poner Bomba 1º Avión	α 0,70	β 0,58
Poner Bomba 2º Avión	γ 0,58	δ 0,70

$E(\alpha) = E(\delta) = 0{,}70$ (si ataca al avión que lleva la bomba los dos se defienden, y con un 70% de probabilidades lo derriban)

$E(\beta) = E(\gamma) = \underbrace{0{,}30}_{} + \underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}7}_{} = 0{,}58$

cuando el segundo avión es atacado el otro huye y el que se queda puede derribar al caza con un 30% de probabilidades

cuando el primer avión es atacado será porque el caza alemán ha derribado al primer avión con un 70% de probabilidades “y” el primer avión es capaz de derribar al caza con un 40% de probabilidades.



$$p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0{,}70 - 0{,}58}{0{,}70 - 0{,}58 - 0{,}58 + 0{,}70} = \frac{0{,}12}{0{,}24} = 0{,}5$$

$$q = \frac{r_{22} - r_{12}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{0{,}70 - 0{,}58}{0{,}70 - 0{,}58 - 0{,}58 + 0{,}70} = \frac{0{,}12}{0{,}24} = 0{,}5$$

Luego, en una incursión de este tipo, la mitad de las ocasiones Harris debería situar la bomba en el primer avión, y la otra mitad en el segundo. Goering debería atacar la mitad de las veces al primer bombardero y la mitad al segundo. Evidentemente, no hay ninguna característica que permita al caza preferir atacar a uno o a otro, por lo que le resultado es lógico.

La expectativa de éxito en destruir el complejo Peenemunde por parte de Harris es de:

r_{ij}	$P(r_{ij})$
0,70	p · q = 0,5 · 0,5 = 0,25
0,58	p · (1–q) = 0,5 · 0,5 = 0,25
0,58	(1–p) · q = 0,5 · 0,5 = 0,25
0,70	(1–p) · (1–q) = 0,5 · 0,5 = 0,25
	1

E(r) = 0,70 · 0,25 + 0,58 · 0,25 + 0,58 · 0,25 + 0,70 · 0,25 = 0,64

La expectativa de éxito de Harris es del 64%. Goering sólo tiene un 36% de posibilidades de rechazar el ataque con el Messerschmidt.

6.17. Problema de competencia en la captación de clientes por parte de dos cooperativas de crédito en una zona rural

En una pequeña comarca rural de montaña hay dos cooperativas de crédito, la Caja de Santa Marta y la Cooperativa Agrícola Fuente Nueva. El número de clientes potenciales es constante en el horizonte temporal analizado, por lo que la única posibilidad que tiene una entidad de crecer es quitándole clientes a la otra.

La Cooperativa Agrícola Fuente Nueva (CAFN) diseña su estrategia de marketing sobre la base de tres posibles campañas:

- *Entrega de vajillas gratuitas a los nuevos clientes que ingresen un mínimo de 2.000 € en una cuenta a plazo.*
- *Entrega gratuita de papeletas para el sorteo de un nuevo tractor de gran potencia, una papeleta por cada incremento de 100 € en el saldo de las cuentas corrientes y de ahorro.*
- *Incremento de los tipos de interés en 25 puntos básicos para todas las modalidades de pasivo.*

La Caja de Santa Marta (CSM) diseña su estrategia de marketing con las siguientes campañas:

- *Entrega de bonos gratuitos de fin de semana en un parador nacional para dos personas a aquellos nuevos clientes que ingresen un mínimo de 1.500 € en una libreta de ahorro.*
- *Entrega gratuita de papeletas para el sorteo de un "sueldo para toda la vida" a aquellos clientes que domicilien su nómina y contraten el nuevo seguro agrícola "Campo Nuevo".*
- *Nuevo crédito personal para compra de aperos agrícolas sin garantía hipotecaria y 30 puntos básicos por debajo de la competencia.*

a) Si las dos cooperativas eligieran respectivamente centrar su campaña en la entrega de vajillas y el nuevo crédito personal, ¿qué tipo de estrategias estarían utilizando? ¿Estarían en equilibrio? Supuesto que así fuera, ¿en qué tipo de equilibrio?

b) Si CAFN tenía inicialmente 1.800 clientes, y después de las campañas comerciales pasa a tener 1.850, ¿cuál es el valor del juego?

c) Si CSM tenía inicialmente 1.450 clientes, ¿cuántos clientes tendrá al finalizar las campañas?

d) Si se mantiene el valor del juego del apartado b), y CAFN entregando vajillas gratuitas una de cada tres veces que realiza una campaña comercial, pierde 30 clientes, y ha decidido no utilizar nunca la estrategia de subida de los tipos de interés de las modalidades de pasivo, ¿cuántos clientes ganará o perderá si entrega papeletas para el sorteo de un nuevo tractor? En este caso, que estrategia tiene CSM y cuál es su valor del juego.

a) Estarían utilizando ambas cooperativas estrategias puras. Estarían en equilibrio, puesto que de la elección de la primera alternativa por parte de CAFN y de la tercera por CSM surgirá un resultado concreto "r_{13}", que será el valor de equilibrio y valor del juego. Se trataría de un equilibrio en estrategias puras.

b) El valor del juego sería la diferencia entre los clientes después de utilizar las estrategias comerciales y los clientes antes de las mismas, esto es, 50 clientes nuevos captados por CAFN.

c) Al ser un juego de suma nula, CSM tendrá 1.400 clientes (50 menos) al finalizar las campañas comerciales.

d) Asumimos que CSM no varía su estrategia, ya que en caso contrario deberíamos conocer la matriz del juego para las diferentes alternativas de CSM.

Por tanto, CSM elige su tercera alternativa. Quien cambia su estrategia es CAFN que ensaya una estrategia mixta, eligiendo su primera alternativa con probabilidad ⅓, y su segunda alternativa con probabilidad ⅔. El resultado de la primera alternativa es una pérdida de 30 clientes, por lo que:

$$E(r) = \tfrac{1}{3} \cdot (-30) + \tfrac{2}{3} \cdot r_{23} = 50 \Longrightarrow r_{23} = 90 \text{ clientes.}$$

es decir, CAFN ganará 90 nuevos clientes con su estrategia comercial.

CSM seguirá utilizando estrategias puras, y para estar en equilibrio, seguirá siendo el valor del juego una pérdida de 50 clientes para CSM.

6.18. Problema de captación de votos en una campaña política para la Presidencia de los Estados Unidos de América

En las elecciones presidenciales de 2004 los candidatos George Bush y John Kerry se enfrentan en una reñida competencia para conseguir la Presidencia de los Estados Unidos.

Llegado ya el mes de noviembre tienen que hacer el cierre de campaña, y consideran que las ciudades más importantes son: New York y Los Ángeles.

Dado que el tiempo es muy importante, y considerando la distancia, pueden viajar de noche y hacer un mitin en cada ciudad, o bien dar dos mítines en una de las ciudades. Ninguno de los dos candidatos conoce qué hará su oponente.

El equipo electoral ha realizado unas estimaciones de ganancia o pérdida de votos en función de cómo hagan Bush y Kerry los mítines de cierre de campaña:

		John Kerry			
		1º N.Y.+ 2º L.Á.	*1º L.A.+ 2º N.Y.*	*2 New York*	*2 Los Ángeles*
George Bush	*1º N.Y.+ 2º L.Á.*	0	–200.000	200.000	600.000
	1º L.A.+ 2º N.Y.	500.000	400.000	–300.000	200.000
	2 en New York	200.000	300.000	–400.000	200.000
	2 en Los Ángeles	–600.000	–800.000	700.000	800.000

¿Cómo deben dar los mítines de cierre ambos candidatos, y cuál será el efecto de los mismos en el voto del electorado americano?

Simplificamos dividiendo por 100.000 las cifras anteriores:

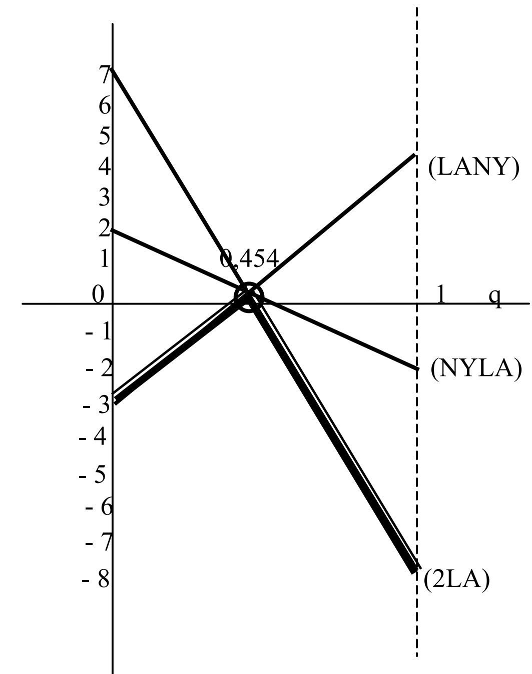
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ -6 & -8 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ -6 & -8 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -3 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Lo peor (filas): –2, –3, –8 → Lo mejor: (–2)

Lo peor (columnas): 4, 7 → Lo mejor: (4)

Luego no hay punto de silla. Aplicamos estrategias mixtas:

	LANY	2NY	
	q	1 – q	
NYLA)	–2	2	E(K / NYLA) = –2q + 2 · (1 – q) = –4q + 2
LANY)	4	–3	E(K / LANY) = 4q – 3 · (1 – q) = 7q – 3
2LA)	–8	7	E(K/ 2LA) = –8q + 7 · (1 – q) = –15q + 7



Aplicando el criterio maximín, para Kerry, de entre el mayor número de votos que pierde elegimos el menor, es decir, el punto de corte entre "LANY" y "2LA":

$$7q - 3 = -15q + 7 \Longrightarrow q = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} = 0{,}454$$

es decir, Kerry daría un mitin en Los Ángeles y otro en New York después, con un 45% de probabilidades. Y daría dos mítines en New York con un 55% de probabilidades.

Por otro lado, la estrategia de dar primero un mitin en New York y luego otra en Los Ángeles nunca deberá seguirla Bush, ya que siempre consigue con ella Kerry más votos que si sigue las otras dos, para todo "q".

		LANY	2NY
LANY)	p	4	–3
2LA)	1 – p	–8	7

$$p = \frac{r_{22} - r_{21}}{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}} = \frac{7 + 8}{4 + 3 + 8 + 7} = \frac{15}{22} = 0{,}682$$

es decir, George Bush debería dar un mitin en Los Ángeles y luego otro en New York con un 68% de probabilidades, y dar dos mítines en Los Ángeles con un 32% de probabilidades. Actuando con esta estrategia ambos candidatos, el resultado sería de:

$$E(K / LANY) = 7q - 3 = 7 \cdot 0{,}454 - 3 = 0{,}18182$$

es decir, Bush conseguiría captar 18.182 votos con sus últimos mítines en detrimento de Kerry.